

OPCIÓN A

A.1.- Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donde λ es un número

real

a) Encontrar los valores de λ para los que la matriz **AB** tiene inversa

b) Dados **a** y **b** números reales cualesquiera ¿puede ser el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ compatible

determinado con **A** la matriz del enunciado?

a)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Multiplicar } 2 \times 3 \text{ con } 3 \times 2 \text{ nos da una de } 2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\exists (AB)^{-1} \Rightarrow |AB| \neq 0 \Rightarrow |AB| = \begin{vmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1+2\lambda - (1-\lambda) \cdot (3+2\lambda) = 1+2\lambda - (3+2\lambda - 3\lambda - 2\lambda^2) \Rightarrow$$

$$|AB| = 2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 + 16 = 25 > 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} \\ \lambda = \frac{-3-5}{4} = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\exists (AB)^{-1} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} - \left\{ -2, \frac{1}{2} \right\}$$

b)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Multiplicar } 2 \times 3 \text{ con } 3 \times 1 \text{ nos da una de } 2 \times 1} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow$$

No puede ser compatible det er min ado

$$\begin{pmatrix} x+2y+\lambda z \\ x-y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Como } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \Rightarrow$$

Compatible in det er min ado $\Rightarrow \forall \lambda, a, b \in \mathbb{R}$

A.2.- Calcular los valores de **a** y **b** para que la función $f(x) = \frac{bx}{x-a}$ tenga como asíntota vertical $x = 2$ y como asíntota horizontal $y = 3$. Razonar si para **a = 2** y **b = 3** la función $f(x)$ tiene un mínimo relativo.

$$f(x) = \frac{bx}{x-a}$$

Asíntota vertical

$$x - a = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{2b}{2-2} = \frac{2b}{0} \Rightarrow 2b \neq 0 \Rightarrow b \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b \neq 0 \end{cases}$$

Asíntota horizontal

$$y = 3 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx}{x-2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{bx}{x}}{\frac{x-2}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{b}{1-0} = b \Rightarrow b = 3$$

$$f'(x) = 3 \frac{x-2-x}{(x-2)^2} = -\frac{6}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(x) \neq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \Rightarrow \text{No hay máximos ni mínimos relativos}$$

A.3.- a) Utilizando el cambio de variable $t = e^x$ calcular $\int e^{x+e^x} dx$

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{7x^2}$

a)

$$\int e^{x+e^x} dx = \int e^{e^x} e^x dx = \int e^t dt = e^t = e^{e^x} + K$$

$$e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{7x^2} = \frac{\text{sen } 0}{7 \cdot 0^2} = \frac{0}{0} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{14x} = \frac{\cos 0}{14 \cdot 0} = \frac{1}{0} \Rightarrow \nexists \text{ lim} \Rightarrow \text{Sin definici3n}$$

A.4.- Calcular la distancia entre las rectas r y s , donde: $r: \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 1 - k \\ z = 3 + k \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = -1 + k \\ y = -1 + 3k \\ z = 4 - 2k \end{cases}$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (2, -1, 1) \\ \vec{v}_s = (1, 3, -2) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{-1}{3} \Rightarrow \text{No son paralelas ni coincidentes}$$

$$\begin{cases} 2 + 2k = -1 + a \\ 1 - k = -1 + 3a \\ 3 + k = 4 - 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2k - a = -3 \\ k + 3a = 2 \\ k + 2a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k + 3a = 2 \\ -k - 2a = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow k + 3 = 2 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow 2(-1) - 1 = -3$$

Se cortan en el punto $\begin{cases} \begin{cases} x = 2 + 2 \cdot (-1) = 0 \\ y = 1 - (-1) = 2 \\ z = 3 + (-1) = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 + 1 = 0 \\ y = -1 + 3 \cdot 1 = 2 \\ z = 4 - 2 \cdot 1 = 2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow A(0, 2, 2) \Rightarrow \text{La distancia es nula}$

OPCIÓN B

B.1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{pmatrix}$

a) Sin utilizar la regla de Sarrus, calcular el determinante de dicha matriz

b) Estudiar el rango de **A** en el caso en que **b = - a**

a)

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a^2 & ab & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} a & b & b \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ b & a^2 & b^2 \\ b & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 0 & a^2 - b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 - b^2 \end{vmatrix} = \\ &= a^2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} a^2 - b^2 & 0 \\ 0 & a^2 - b^2 \end{vmatrix} = a^2 \cdot (a^2 - b^2)^2 \end{aligned}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a^2 \\ -a^2 & a^2 & a^2 \\ -a^2 & a^2 & a^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 1$$

B.2. La función $f : [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ \frac{x^2 - 32}{x - 4} & \text{si } x > 8 \end{cases}$ es continua en $[0, \infty)$

a) Hallar el valor de **a** que hace que esta afirmación sea cierta.

b) Calcular $\int_0^{10} f(x) dx$

a)

$$\begin{cases} f(8) = \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = \sqrt{8a} = 2\sqrt{2a} \\ \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = \frac{8^2 - 32}{8 - 4} = \frac{32}{4} = 8 \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{2a} = 8 \Rightarrow \sqrt{2a} = 4 \Rightarrow 2a = 16 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2x} & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ \frac{x^2 - 32}{x - 4} & \text{si } x > 8 \end{cases}$$

b)

$$\int_0^{10} f(x) dx = 2\sqrt{2} \int_0^8 \sqrt{x} dx + \int_8^{10} \frac{x^2 - 32}{x - 4} dx = 2\sqrt{2} \int_0^8 x^{\frac{1}{2}} dx + \int_8^{10} (x + 4) dx - \int_8^{10} \frac{16}{x - 4} dx =$$

$$\frac{x^2 - 32}{x - 4} \quad \begin{array}{l} x - 4 \\ \hline -x^2 + 4x \quad x + 4 \\ 4x - 32 \\ \hline -4x + 16 \\ \hline -16 \end{array} \quad x - 4 = t \Rightarrow dx = dt \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \Rightarrow t = 6 \\ x = 8 \Rightarrow t = 4 \end{cases}$$

$$\frac{-x^2 + 4x}{x - 4} \quad \begin{array}{l} x + 4 \\ \hline 4x - 32 \\ \hline -4x + 16 \\ \hline -16 \end{array}$$

$$\int_0^{10} f(x) dx = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot \left[x^{\frac{3}{2}} \right]_0^8 + \int_8^{10} x dx + 4 \int_8^{10} dx - 16 \int_8^{10} \frac{1}{t} dt = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot (\sqrt{8^3} - \sqrt{0^3}) + \frac{1}{2} \cdot [x^2]_8^{10} + 4 \cdot [x]_8^{10} - 16 [\ln t]_4^6$$

$$\int_0^{10} f(x) dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot 8 \cdot 2\sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot (10^2 - 8^2) + 4 \cdot (10 - 8) - 16(\ln 6 - \ln 4) = \frac{128}{3} + \frac{100 - 64}{2} + 8 - 16 \cdot \ln \frac{6}{4}$$

$$\int_0^{10} f(x) dx = \frac{128}{3} + 26 - 16 \cdot \ln \frac{3}{2} = \frac{128 + 78}{3} - 16 \cdot \ln \frac{3}{2} = \frac{206}{3} + 16 \cdot \ln \frac{2}{3}$$

B.3.- Descomponer el número 8 en dos sumandos positivos de manera que la suma del cubo del primer sumando más el cuadrado del segundo sea mínima.

Llamando **A** y **B** a los sumandos positivos que se buscan

$$\begin{cases} A + B = 8 \Rightarrow B = 8 - A \\ P = A^3 + B^2 = A^3 + (8 - A)^2 = A^3 + A^2 - 16A + 64 \end{cases} \Rightarrow P' = \frac{dP}{dA} = 3A^2 + 2A - 16 \Rightarrow$$

$$P' = 0 \Rightarrow 3A^2 + 2A - 16 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4 \cdot 3 \cdot (-16) = 4 + 192 = 196 > 0 \Rightarrow A = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{6} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A = \frac{-2 + 14}{6} = 2 \\ A = \frac{-2 - 14}{6} = -\frac{16}{6} = -\frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow P'' = \frac{d^2P}{dA^2} = 6A + 2 \Rightarrow$$

(No es solución por ser negativa)

$$P''(2) = \frac{d^2P}{dA^2} = 6 \cdot 2 + 2 = 14 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \Rightarrow \text{Solución} \begin{cases} A = 2 \\ B = 6 \end{cases}$$

B.4.-

a) Estudiar si son linealmente independientes los vectores: $\vec{a} = (3, 1, 2)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$, $\vec{c} = (1, 1, 1)$

Expresar el vector $\vec{v} = (0, 0, 1)$ como combinación lineal de \vec{a} , \vec{b} y \vec{c}

b) ¿Son el plano $\pi: 2x + 3y + z + 1 = 0$ y la recta $r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{-3} = -z$ ortogonales? Justificar

la respuesta

a) Si los vectores son linealmente independientes no serán coplanarios por lo tanto el determinante que generan es distinto de cero

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 1 - 2 - 3 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Son linealmente independientes}$$

$$\vec{v} = m\vec{a} + n\vec{b} + r\vec{c} \Rightarrow (0, 0, 1) = m(3, 1, 2) + n(0, 1, 1) + r(1, 1, 1) \Rightarrow \begin{cases} 3m + r = 0 \\ m + n + r = 0 \\ 2m + n + r = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m - n - r = 0 \\ 2m + n + r = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$m = 1 \Rightarrow 3 \cdot 1 + r = 0 \Rightarrow r = -3 \Rightarrow 1 + n - 3 = 0 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow \vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$$

b) Si son ortogonales los vectores directores son proporcionales por ser paralelos

$$r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (-2, -3, -1) \equiv (2, 3, 1) \\ \vec{v}_\pi = (2, 3, 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{1}{1} \Rightarrow \text{Son ortogonales}$$